Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Al patrulea test de selecţie pentru juniori
Bucureşti, 11 mai 2009

Problema 1. Să se arate că în orice triunghi ABC cu $A = 90°$ avem inegalitatea:

$$(AB - AC)^2(BC^2 + 4AB \cdot AC)^2 \leq 2BC^6.$$

Problema 2. Un număr natural se numeşte *saturat*, dacă în descompunerea sa în factori primi, fiecare factor apare la o putere mai mare sau egală cu 2. De exemplu, numerele $8 = 2^3$ şi $9 = 3^2$ sunt saturate; în plus, ele sunt şi consecutive. Să se arate că există o infinitate de numere naturale saturate consecutive.

Problema 3. Fie ABC un triunghi, A' punctul în care bisectoarea interioară a unghiului BAC intersectează dreapta BC şi d_A perpendiculara prin punctul A' pe dreapta BC. În mod analog sunt construite şi dreptele d_B şi d_C. Să se arate că dreptele d_A, d_B şi d_C sunt concurente dacă şi numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

Problema 4. Să se arate că există cel puţin o rearanjare $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{63}$ a numerelor $0, 1, 2, \ldots, 63$, astfel încât $a_i - a_j \neq a_j - a_k$, oricare ar fi indicii $i < j < k \in \{0, 1, 2, \ldots, 63\}$.

Timp de lucru 4 ore
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Al patrulea test de selecţie
Soluţii

Problema 1. Să se arate că în orice triunghi ABC cu $A = 90^\circ$ avem inegalitatea:

$$(AB - AC)^2(BC^2 + 4AB \cdot AC)^2 \leq 2BC^6.$$

Soluţie. Notăm $a = \frac{AB}{BC}$, $b = \frac{AC}{BC}$; evident $a^2+b^2 = 1$. Inegalitatea devine $(a-b)^2(1+4ab)^2 \leq 2$ sau $(1-2ab)(1+4ab)^2 \leq 2$. Cu notaţia $x = 2ab$, avem $(1-x)(1+2x)^2 \leq 2 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x + 1 \geq 0$, care se scrie $(2x-1)^2(x+1) \geq 0$, evident.

Problema 2. Un număr natural se numeşte *saturat*, dacă în descompunerea sa în factori primi, fiecare factor apare la o putere mai mare sau egală cu 2. De exemplu, numerele $8 = 2^3$ şi $9 = 3^2$ sunt saturate; în plus, ele sunt şi consecutive. Să se arate că există o infinitate de numere naturale saturate consecutive.

Soluţie. Dacă n şi $n+1$ sunt saturate, atunci şi numerele $4n(n+1)$ şi $4n(n+1)+1 = (2n+1)^2$ sunt saturate.

Problema 3. Fie ABC un triunghi, A' punctul în care bisectoarea interioară a unghiului BAC intersectează dreapta BC şi d_A perpendiculara prin punctul A' pe dreapta BC. În mod analog sunt construite şi dreptele d_B şi d_C. Arătaţi că dreptele d_A, d_B şi d_C sunt concurente dacă şi numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

Soluţie.

Dacă triunghiul ABC este isoscel, este evident că cele trei drepte sunt concurente. Pentru a demonstra reciproca, să observăm că

$$|A'B|^2 + |B'C|^2 + |C'A|^2 = |A'C|^2 + |B'A|^2 + |C'B|^2.$$

Folosind notaţiile standard şi formulele binecunoscute

$$|A'B| = ac/(b+c), \quad |A'C| = ab/(b+c)$$

şi analogele lor, egalitatea de mai sus poate fi rescrisă sub forma

$$\sum a^2c^2/(b+c)^2 = \sum a^2b^2/(b+c)^2,$$

de unde, grupând termenii care au acelaşi numitor şi facând simplificările,

$$\sum a^2(c-b)/(b+c) = 0.$$

Rezultă $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2 = 0$, deci triunghiul ABC are cel puţin două laturi congruente.

Problema 4. Să se arate că există cel puţin o rearanjare $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{63}$ a numerelor $0, 1, 2, \ldots, 63$, astfel încât $a_i - a_j \neq a_j - a_k$, oricare ar fi indicii $i < j < k \in \{0, 1, 2, \ldots, 63\}$.

Soluţie. Dacă există o rearanjare $A = (a_0, a_1, \ldots, a_{2^n-1})$ a numerelor $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, atunci $(2A)(2A+1)$ reprezintă o rearanjare a numerelor $0, 1, 2, \ldots, 2^{n+1} - 1$.